

ResolSysteme (0.1.6), version « pyluatex »

1 Préambule, avec le package pyluatex

```
\documentclass[french,a4paper,10pt]{article}
\usepackage[margin=1.5cm]{geometry}
\usepackage[executable=python.exe]{pyluatex}
\usepackage[pyluatex]{ResolSysteme}           %version pyluatex, lua + shell-escape
\usepackage{systeme}
\sisetup{locale=FR,output-decimal-marker={,}}
```

2 Affichage d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

On considère les matrices $A=\text{\AffMatrice}(1,2 \S 3,4)$
et $B=\text{\AffMatrice}[n](-1,-1/3,4 \S 1/3,4,-1 \S -1,0,0)$
et $C=\text{\AffMatrice}(1,2,3,4 \S 5,6,7,0 \S 1,1,1,1 \S 2,-3,-5,-6)$.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 4 \\ 1/3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

3 Déterminant d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

Le déterminant de $A=\text{\AffMatrice}(1,2 \S 3,4)$ est
 $\text{\det}(A)=\text{\DetMatricePY}(1,2 \S 3,4)$.

Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\det(A) = -2$.

Le déterminant de $A=\text{\AffMatrice}(-1,0.5 \S -1/2,4)$ est
 $\text{\det}(A)=\text{\DetMatricePY}[dec](-1,0.5 \S -1/2,4)$.

Le déterminant de $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$ est $\det(A) = -3,75$.

Le dét. de $A=\text{\begin{pNiceMatrix}} -1\&frac{1}{3}\&4 \ \ \ \frac{1}{3}\&4\&-1 \ \ \ -1\&0\&0 \ \end{pNiceMatrix}$ est
 $\text{\det}(A) \ \text{\approx} \ \text{\DetMatricePY}[dec=3](-1,1/3,4 \S 1/3,4,-1 \S -1,0,0)$.

Le dét. de $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 4 \\ \frac{1}{3} & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est $\det(A) \approx 16,333$.

Le dét. de $A=\text{\begin{pNiceMatrix}} 1\&2\&3\&4\ \ \ \ 5\&6\&7\&0\ \ \ \ 1\&1\&1\ \ \ \ 2\&-3\&-5\&-6 \ \end{pNiceMatrix}$
est $\text{\det}(A)=\text{\DetMatricePY}(1,2,3,4 \S 5,6,7,0 \S 1,1,1,1 \S 2,-3,-5,-6)$.

Le dét. de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ est $\det(A) = 24$.

4 Calculs avec des matrices, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

`\$ \ProduitMatricesPY(1,2)(3 § 4)[Aff] \$ et \$ \ProduitMatricesPY(1,2)(3,4 § 5,6)[Aff] \$ \\
 \$ \ProduitMatricesPY(-5,6 § 1,4)(2 § 7)[Aff] \$ et \$ \ProduitMatricesPY(-5,6 § 1,4)(2,-4 § 7,0)[Aff] \$`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (11) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (13 \quad 16)$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 20 \\ 30 & -4 \end{pmatrix}$$

`\$ \ProduitMatricesPY(1,2,3)(4 § 5 § 6)[Aff] \$ et \$ \ProduitMatricesPY(1,2,3)(1,1,1 § 2,1,5 §
 0,5,-6)[Aff] \$ \\
 \$ \ProduitMatricesPY(1,1,1 § 2,1,5 § 0,5,-6)(1 § 2 § 3)[Aff] \$ et
 \$ \ProduitMatricesPY(1,1,1 § 2,1,5 § 0,5,-6)(1,2,3 § -5,-4,2 § 3,3,10)[Aff] \$`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (32) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} = (5 \quad 18 \quad -7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 16 \\ 12 & 15 & 59 \\ -43 & -38 & -45 \end{pmatrix}$$

`\$ \ProduitMatricesPY(1,2,3,4)(5 § 6 § 7 § 8)[Aff] \$ \\
 \$ \ProduitMatricesPY(1,2,3,4)(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)[Aff] \$ \\
 \$ \ProduitMatricesPY(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)(1 § 2 § 3 § 4)[Aff] \$ \\
 \$ \ProduitMatricesPY(1,1,1,5 § 2,1,5,6 § 0,5,-6,0 § 1,-5,4,2)(1,5,4,0 § 2,-1,-1,5 § 3,0,1,2, §
 4,6,9,10)[Aff] \$`

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = (70)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (9 \quad -2 \quad 9 \quad 25)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 43 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 34 & 49 & 57 \\ 43 & 45 & 66 & 75 \\ -8 & -5 & -11 & 13 \\ 11 & 22 & 31 & 3 \end{pmatrix}$$

$\$ \backslash \text{MatricePuissancePY}(1,1 \ S 5,-2)(7)[\text{Aff}] \$ \backslash \backslash$
 $\$ \backslash \text{MatricePuissancePY}(1,1,-1 \ S 5,-2,1 \ S 0,5,2)(3)[\text{Aff}] \$ \backslash \backslash$
 $\$ \backslash \text{MatricePuissancePY}(1,1,1,1 \ S 5,-2,1,5 \ S 0,5,2,-1 \ S 0,1,1,1)(5)[\text{Aff}] \$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} -559 & 673 \\ 3365 & -2578 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -24 & 8 & -16 \\ 65 & -58 & 9 \\ 25 & 70 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 886 & 769 & 769 & 913 \\ 1730 & 847 & 1090 & 1655 \\ 1395 & 1865 & 1622 & 1565 \\ 720 & 625 & 625 & 742 \end{pmatrix}$$

5 Inverse d'une matrice, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est
 $A^{-1} = \text{MatriceInversePY} \langle \text{cell-space-limits}=2\text{pt} \rangle (1,2 \ S 3,4) \$$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est
 $A^{-1} = \text{MatriceInversePY} \langle \text{cell-space-limits}=2\text{pt} \rangle (1,2 \ S 3,4) \$$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est
 $A^{-1} = \text{MatriceInversePY} \langle \text{cell-space-limits}=2\text{pt} \rangle (1,2 \ S 3,6) \$$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \text{Matrice non inversible}$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est
 $A^{-1} = \text{MatriceInversePY} \langle \text{cell-space-limits}=2\text{pt} \rangle (1,2 \ S 3,4) \$$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ est
 $A^{-1} = \text{MatriceInversePY} \langle \text{cell-space-limits}=2\text{pt} \rangle (1,2,3 \ S 4,5,6 \ S 7,8,8) \$$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \text{MatriceInversePY}^*(1,2,3 \text{ } 4,5,6 \text{ } 7,8,8)$.

$$\text{L'inverse de } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \text{ est } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -1 \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$ est $A^{-1} = \text{MatriceInversePY}[n](1,2,3,4 \text{ } 5,6,7,0 \text{ } 1,1,1,1 \text{ } 2,-3,-5,-6)$.

$$\text{L'inverse de } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \end{pmatrix} \text{ est } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 1/24 & -1/2 & 1/3 \\ -17/8 & -5/24 & 9/2 & -2/3 \\ 11/8 & 7/24 & -7/2 & 1/3 \\ 1/8 & -1/8 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 Résolution d'un système, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

La solution de $\begin{cases} -9x - 8y = -8 \\ 3x - 6y = -7 \end{cases}$ est $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{39}; \frac{29}{26} \right) \right\}$.

$$\text{La solution de } \begin{cases} -9x - 8y = -8 \\ 3x - 6y = -7 \end{cases} \text{ est } \mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{39}; \frac{29}{26} \right) \right\}.$$

La solution de $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x + 8y = 1 \end{cases}$ est $\mathcal{S} = \{\text{Matrice non inversible}\}$.

$$\text{La solution de } \begin{cases} x + 2y = -5 \\ 4x + 8y = 1 \end{cases} \text{ est } \mathcal{S} = \{\text{Matrice non inversible}\}.$$

La solution de $\begin{cases} -9x - 8y = -8 \\ 3x - 6y = -7 \end{cases}$ est $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{39}; \frac{29}{26} \right) \right\}$.

$$\text{La solution de } \begin{cases} -9x - 8y = -8 \\ 3x - 6y = -7 \end{cases} \text{ est } \mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{4}{39}; \frac{29}{26} \right) \right\}.$$

La solution de $\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases}$ est $\mathcal{S} = \{(2; -1; -2)\}$.

$$\text{La solution de } \begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ -x - y + 2z = -5 \end{cases} \text{ est } \mathcal{S} = \{(2; -1; -2)\}.$$

La solution de $\text{\systeme}[x+y+z=-1,3x+2y-z=-5,-x-y+2z=0]$ est donnée par $X = \text{\SolutionSystemePY}[d](1,1,1 \text{ § } 3,2,-1 \text{ § } -1,-1,2)(-1,-5,0)$ [Matrice].

La solution de
$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
 est donnée par $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

La solution de $\text{\systeme}[xyzt]\{y+z+t=1,x+z+t=-1,x+y+t=1,x+y+z=0\}$ est $\text{\mathcal{S}} = \text{\left\lbrace\right\rbrace}\text{\SolutionSystemePY}[d](0,1,1,1 \text{ § } 1,0,1,1 \text{ § } 1,1,0,1 \text{ § } 1,1,1,0)(1,-1,1,0)\text{\right\rbrace}$.

La solution de
$$\begin{cases} y + z + t = 1 \\ x + z + t = -1 \\ x + y + t = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
 est $\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right) \right\}$.

La solution de $\text{\systeme}[xyzt]\{x+2y+3z+4t=-10,5x+6y+7z=0,x+y+z+t=4,-2x-3y-5z-6t=7\}$ est $X = \text{\SolutionSystemePY}[dec](1,2,3,4 \text{ § } 5,6,7,0 \text{ § } 1,1,1,1 \text{ § } -2,-3,-5,-6)(-10,0,4,7)$ [Matrice].

La solution de
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = -10 \\ 5x + 6y + 7z = 0 \\ x + y + z + t = 4 \\ -2x - 3y - 5z - 6t = 7 \end{cases}$$
 est $X = \begin{pmatrix} 17,75 \\ -12,75 \\ -1,75 \\ 0,75 \end{pmatrix}$.

7 État probabiliste d'un graphe probabiliste, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

État initial : $P_0 = \text{\AffEtatProb}[t](1/3,2/3)$.

Matrice de transition : $M = \text{\AffMatrice}[dec](0.75,0.25 \text{ § } 0.9,0.1)$

État à l'instant 5 : $P_5 \approx \text{\EtatProbPY}[dec=3](1/3,2/3) \text{\%}$
 $(0.75,0.25 \text{ § } 0.9,0.1)$
 (5)

État initial : $P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$

État à l'instant 5 : $P_5 \approx (0,783 \quad 0,217)$

État initial : $P_0 = (0,33, 0,52, 0,15)$.

Matrice de transition :

$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,15 & 0,75 & 0,1 \end{pmatrix}$

État à l'instant 7 :

$P_7 \approx (0,33, 0,52, 0,15)$
 $(0,1, 0,2, 0,7 \text{ § } 0,25, 0,25, 0,5 \text{ § } 0,15, 0,75, 0,1)$
(7)

État initial : $P_0 = (0,33 \quad 0,52 \quad 0,15)$.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,15 & 0,75 & 0,1 \end{pmatrix}$

État à l'instant 7 : $P_7 \approx (0,184 \quad 0,432 \quad 0,384)$

État initial : $P_0 = (0,33, 0,52, 0,15, 0)$.

Matrice de transition :

$M = \begin{pmatrix} 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 \\ 0,25, 0,25, 0,25, 0,25 \\ 0,15, 0,15, 0,2, 0,5 \\ 0,3, 0,3, 0,2, 0,2 \end{pmatrix}$

État à l'instant 4 :

$P_4 \approx (0,33, 0,52, 0,15, 0)$
 $(0,1, 0,2, 0,3, 0,4 \text{ § } 0,25, 0,25, 0,25, 0,25 \text{ § } 0,15, 0,15, 0,2, 0,5 \text{ § } 0,3, 0,3, 0,2, 0,2)$
(4)

État initial : $P_0 = (0,33 \quad 0,52 \quad 0,15 \quad 0)$.

Matrice de transition : $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,15 & 0,15 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$

État à l'instant 4 : $P_4 \approx (0,211 \quad 0,232 \quad 0,233 \quad 0,324)$

8 État stable d'un graphe probabiliste, 2x2 ou 3x3 ou 4x4

L'état stable du gr. prob. de matrice

$M = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$

est $\Pi = (0,72, 0,28)$

ou $\Pi = (0,12, 0,88)$.

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,12 & 0,88 \end{pmatrix}$

est $\Pi = \left(\frac{3}{10} \quad \frac{7}{10} \right)$ ou $\Pi = (0,3 \quad 0,7)$.

L'état stable du gr. prob. de matrice

$M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.03 & 0.07 \\ 0.30 & 0.43 & 0.27 \\ 0.14 & 0.07 & 0.79 \end{pmatrix}$

est $\Pi = \text{EtatStablePY}[d](0.9, 0.03, 0.07 \text{ } 0.30, 0.43, 0.27 \text{ } 0.14, 0.07, 0.79)$

ou $\Pi = \text{EtatStablePY}[\text{dec}](0.9, 0.03, 0.07 \text{ } 0.30, 0.43, 0.27 \text{ } 0.14, 0.07, 0.79)$.

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,03 & 0,07 \\ 0,3 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$

est $\Pi = \begin{pmatrix} \frac{63}{100} & \frac{7}{100} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ ou $\Pi = (0,63 \quad 0,07 \quad 0,3)$.

L'état stable du gr. prob. de matrice

$M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.15 & 0.15 & 0.2 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}$

est $\Pi \approx \text{EtatStablePY}[\text{dec}=5](0.1, 0.2, 0.3, 0.4 \text{ } 0.25, 0.25, 0.25, 0.25 \text{ } 0.15, 0.15, 0.2, 0.5 \text{ } 0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$

L'état stable du gr. prob. de matrice $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,15 & 0,15 & 0,2 & 0,5 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$

est $\Pi \approx (0,211\ 23 \quad 0,232\ 35 \quad 0,232\ 74 \quad 0,323\ 68)$.